國立臺北科技大學一百學年第一學期

電機系博士班資格考試試題範本說明

一. 本系博士班資格考試試題為 A4 格式之版面。

二. 提供之試題範本自第 1 頁起提供 A4 格式之版面共 4 頁，若有不足請自行加頁。

三. 本範本以 Office 之 Word 文書應用軟體製作，命題委員至少須輸入之資料共四項，各項簡要說明如下：(前三項請依範本上之原字型與字型大小輸入，*前二項已代為執行合併列印套稿，請確認組別名稱與考試科目*。謝謝您！)

(一)【考試科目名稱】 ⟹ [依所附檔案內考試科目名稱完整輸入取代]

(二) ⟹ [請依試題題數輸入取代並增加必要之配分與各項特殊規定]

注意事項：

1. 本試題共【1】題，配分共 100 分。
2. 請按順序標明題號作答，不必抄題。
3. 全部答案均須答在試卷答案欄內，否則不予計分。
4. 考試時間:二小時。

(三)

試題本文 ⟹ [請輸入題號與試題內容並完成排版與列印]

範本版面說明

試題本文之外方格線，係以單格表格並以隱藏格線方式設計，請在格線內命題，不要超出格線外；若有圖片，亦請於列印後黏貼於規劃版面內。謝謝！

四. 命題版面達 A4 共 2 頁(含)以上時，請修改範本第 1 頁之 第一頁　共一頁 為 第一頁　共二頁；若頁數更多，請類推修改增加之。

五. 本範本檔案及考試科目名稱檔案，將由本系以隨身碟提供命題委員，請命題委員在規劃版面內命題，並以 A4 紙張列印出試題繳交，隨身碟亦請交給本系。本系將直接列印後隨即製版，不再作其他處理，若有圖片請自行黏貼於妥當之版面位置。

國 立 臺 北 科 技 大 學

一百學年第一學期電機系博士班資格考試

隨機程序試題

第一頁　共一頁

注意事項：

1. 本試題共【5】題，配分共 100 分。
2. 請按順序標明題號作答，不必抄題。
3. 全部答案均須答在試卷答案欄內，否則不予計分。
4. 考試時間:二小時。

1. (a) (6pt) Give the definition of a probability measure P on a measurable space $(\Omega, \boldsymbol{F})$.
   (b) (5pt) Give the definition that a random vector $\overline{X}$ is Gaussian.
   (c) (5pt) State the central limit theorem.
   (d) (4pt) Give the definition that a random process $\{X(t), t \in I\}$ is wise-sense stationary.

2. (a) (7pt) Give the definition that two random variables X, Y are uncorrelated.
   (b) (7pt) Give the definition that two random variables X, Y are independent.
   (c) (6pt) Give an example that two random variables X, Y are uncorrelated but dependent. Justify your answer.

3. (a) (15pt) Give the definitions for a random sequence $\{X_n; n \in \square\}$ converging in the following modes: almost sure convergence, convergence in r_th mean, and convergence in probability.
   (b) (5pt) Consider a sequence of dependent random variables $U_1, U_2, \cdots$ such that $\exists b_i > 0$, $P(0 < U_i < b_i) = 1$ for all i and $\sum_{i=1}^{\infty} b_i < \infty$. Define $Z_n = U_1 + \cdots + U_n$ for $n \in \square$. Show that $\{Z_n; n \in \square\}$ converges in r_th mean for $r \geq 1$.

4. $\{X_n; n \in \square\}$ is a ternary i.i.d. process with pmf $p_X(-1) = p_X(1) = 1/5$ and $p_X(0) = 3/5$. Fix an positive integer N, define the discrete-time random process $\{Y_n; n > N\}$ by
   $Y_n = \dfrac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} X_{n-i}$.
   (a) (8pt) Find EX_n, $\mathrm{var}(X_n)$, characteristic function $\phi_{X_n}(u)$, covariance

function $k_X(t,s) \quad t,s \in \mathbb{R}$.

(b) (6pt) Find EY_n , $\operatorname{var}(Y_n)$, characteristic function $\phi_{Y_n}(u)$ for $n > N$.

(c) (6pt) Find the cross-correlation $R_{X,Y}(t,s) = E[X_t Y_s] \quad t \in \mathbb{R}, s > N$.

5. $\{X_n; n \in \mathbb{Z}\}$ and $\{Z_n; n \in \mathbb{Z}\}$ are mutually independent i.i.d. zero mean processes with correlations $R_X(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$ and $R_Z(k) = \begin{cases} 2 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$. Let $Y_n = Z_n + 2Y_{n-1}$, $U_n = X_n + Y_n$, $W_n = U_n - 2U_{n-1}$.

(a) (4pt) Find the power spectral density $S_Z(f)$ of $\{Z_n; n \in \mathbb{Z}\}$.

(b) (4pt) Find the power spectral density $S_Y(f)$ of $\{Y_n; n \in \mathbb{Z}\}$.

(c) (4pt) Find the power spectral density $S_U(f)$ of $\{U_n; n \in \mathbb{Z}\}$

(d) (4pt) Find the power spectral density $S_W(f)$ of $\{W_n; n \in \mathbb{Z}\}$.

(e) (4pt) Find $E[(X_n - W_n)^2]$.